A tots els exercicis: justifiqueu formalment les passes de les respostes

B1

1. A una universitat específica, els professors poden ser associats, titulars i catedràtics, i el rector presumeix d'haver assolit la igualtat de gènere perquè aquest és independent de la categoria. Concretament, un 30% són dones associades, un 18% dones titulars i un 9% dones catedràtiques. Deduïu els percentatges corresponents pels professors homes, justificant la resposta. (2 pts)

2. En el sistema de *streaming* de determinada escola, quan el vídeo funciona bé, l'àudio s'escolta bé amb probabilitat 0.96; i quan l'àudio s'escolta bé, el vídeo funciona bé el 83% de les vegades. Es sap que en el 77% de les sessions el so i la imatge són satisfactoris i permeten fer classe sense problemes. Amb aquesta informació, deduïu la probabilitat que en una sessió no funcioni cap dels dos components. (3 pts)

3. A un centre d'atenció primària s'empra una prova diagnòstica ràpida per a certa malaltia vírica que dóna positiu a la prova el 60% de les vegades per a infectats, i el 10% per a no infectats. S'està considerant modificar el protocol, repetint la prova als pacients que hagin donat negatiu la primera vegada; llavors, serà positiu el pacient que ha donat positiu a la primera o a la segona prova. Suposant que hi ha un 20% de pacients realment infectats entre els que visiten el centre, determineu: (5 pts)

a) la proporció de positius que es detecten mitjançant el protocol original, i el mateix amb la modificació;

b) la probabilitat que un pacient estigui infectat si ha donat positiu amb el primer protocol;

c) ídem amb el protocol modificat;

d) basant-se en els resultats previs, digueu si seria beneficiós aplicar la modificació del protocol.

POISSON

	N									
λ	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,5	0,607	0,910	0,986	0,998	1,000					
1	0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999	1,000			
1,5	0,223	0,558	0,809	0,934	0,981	0,996	0,999	1,000		
2	0,135	0,406	0,677	0,857	0,947	0,983	0,995	0,999	1,000	
3	0,050	0,199	0,423	0,647	0,815	0,916	0,966	0,988	0,996	0,999
4	0,018	0,092	0,238	0,433	0,629	0,785	0,889	0,949	0,979	0,992
5	0,007	0,040	0,125	0,265	0,440	0,616	0,762	0,867	0,932	0,968
6	0,002	0,017	0,062	0,151	0,285	0,446	0,606	0,744	0,847	0,916
8	0,000	0,003	0,014	0,042	0,100	0,191	0,313	0,453	0,593	0,717
λ	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
4	0,997	0,999	1,000							
5	0,986	0,995	0,998	0,999	1,000					
6	0,957	0,980	0,991	0,996	0,999	0,999	1,000			
8	0,816	0,888	0,936	0,966	0,983	0,992	0,996	0,998	0,999	1,000

B2

1. A un sistema informàtic, una variable X relacionada amb la mida dels documents pren valors $x=10^k$, on k=0, 1, …, 6 (és a dir: 1, 10, 100, …). La probabilitat que X valgui x és el doble de la probabilitat per a un valor deu vegades més gran (és a dir: $p_X(x) = 2p_X(10x)$), en tots els casos. Determineu la funció de probabilitat de X i l'esperança de la variable. Digueu també què val la mediana (quantil 0.5, o percentil 50%), justificant la resposta. (2 pts)

2. Sigui T una variable aleatòria contínua que pren valors en l'interval [0, 9]. Un investigador ha presentat la següent funció com la seva funció de distribució:

$$\frac{t^2 - 5t}{(3-t)^2}, 0 \leq t \leq 9$$

Discutiu si la proposta és justificable o no, raonadament. (1 pt)

3. Considerem una variable aleatòria W que només pren 3 valors, -10, 0 i 10. Sabem que la seva desviació tipus val 9 i que el 50% de les vegades la variable és negativa. Trobar la funció de probabilitat de W i el seu valor esperat (Indicació: digueu x a P(W=0)). (2 pts)

4. Una empresa fabrica panells solars rectangulars, amb diferent mides d'ample i de llarg, segons el nombre de mòduls (cèl·lules fotovoltaiques) que s'hi instal·len. El fabricant utilitza 2, 3 o 4 mòduls d'ample, i 5, 10 o 15 mòduls de llarg, però no en qualsevol combinació, ni totes les combinacions emprades es venen igual. A la taula següent es mostra, per cada 100 vendes, com es distribueixen segons les dimensions del panell: (5 pts)

	2	**3**	**4**
5	25	20	16
10	0	10	21
15	0	0	8

a) Quin és l'ample esperat?
b) Quin és el llarg esperat?
c) Quin és el nombre esperat de mòduls a un panell?
d) Quina és la covariància entre ample i llarg?
e) El signe obtingut és coherent amb el que s'aprecia a les dades? Raoneu la resposta.

B3

1. El quocient intel·lectual (IQ) per a nens de 12 anys s'obté mitjançant certes proves psicològiques, ajustades per a proporcionar un model Gaussià (Normal) amb esperança 100 i desviació tipus 10. Suposem que a una escola es considera que un alumne és d'altes capacitats (AC) si té un IQ superior a 120. Trobeu quina seria la proporció d'alumnes amb AC si l'IQ dels alumnes de 12 anys d'aquesta escola es distribueix segons aquest model. (2 pts)

2. Una classe té 25 alumnes de 12 anys d'edat, independents entre ells. Digueu quin és el model per a descriure el nombre d'alumnes amb AC, i calculeu manualment les probabilitats dels primers valors d'aquesta variable (és suficient amb arribar a una probabilitat acumulada que sobrepassi el 97.5%). Interpreteu el que heu trobat. (2 pts)

3. Una determinada versió del sistema operatiu XYZ llença avisos als seus usuaris quan es produeix una "minor update", que no requereix un *restart* immediat, encara que el sistema força el *restart* si amb el temps han arribat 10 "minor updates". Els avisos són independents entre sí, i es produeixen en mitjana un cada 45 dies. (4 pts)

a) Quin és el model de probabilitat de la variable "Nombre de "minor updates" en un període de 6 mesos"?
b) Calculeu la probabilitat que un usuari que ignora els avisos es trobi amb un *restart* forçat abans de 6 mesos des de l'últim (assumiu que tots els mesos són de 30 dies).
c) Podeu averiguar quin és el temps màxim (en mesos, amb un error de l'1%) que pot passar sense rebre cap avís de "minor updates"?

4. Reprenem la variable X del primer exercici de B2, la mida d'uns documents d'aquest sistema informàtic. Admetem que el valor esperat de X és 10000 aprox., i la desviació tipus 90000 aprox. Es vol determinar la mida total màxima, amb un marge d'error de l'1%, per a un conjunt de *n* documents seleccionats a l'atzar. Resoleu per al cas concret de 500 documents. Valoreu si l'aproximació feta té la fiabilitat necessària. (2 pts)

NORMAL

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2.0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
3.0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990